Seria 2

Rachunek prawdopodobieństwa

Podstawowe definicje

Oznaczenia. Średnia $\langle X\rangle = \mathbb{E}X = \int X\,\mathrm{d}\mathbb{P}(X)$, gdzie $\mathbb{P}$ jest miarą probabilistyczną (nieujemną i znormalizowaną do 1, tj. $\langle 1\rangle = 1$ z gęstością $\mathrm{d}\mathbb{P}(X) = p(X)\,\mathrm{d}X$ dla zmiennej ciągłej), wariancja $\sigma_X^2 = \operatorname{Var} X = \langle (X - \langle X\rangle)^2\rangle = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2$. Rozróżniamy funkcję charakterystyczną, funkcję generującą momenty oraz funkcję generującą prawdopodobieństwa:

$$\chi_X(t) = \mathbb{E}e^{itX} = \langle e^{itX}\rangle, \quad M_X(s) = \mathbb{E}e^{sX} = \langle e^{sX}\rangle, \quad G_X(u) = \mathbb{E}u^X = \langle u^X\rangle.$$

Ostatnią stosujemy do zmiennych o wartościach $0, 1, 2, \ldots$. Kumulanty definiujemy przez $K_X(s) = \ln M_X(s)$ i $\kappa_r = K_X^{(r)}(0)$. Gwiazdka oznacza proponowane rozszerzenie.

Zadanie 1

Dla rzeczywistego $\alpha > 0$ oblicz całkę Gaussowską:

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Zadanie 2

Rozważ funkcję Gamma zdefiniowaną, dla $\operatorname{Re} z > 0$, przez

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Udowodnij: a) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, b) $\Gamma(1) = 1$, c) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Zadanie 3

Wyprowadź wiodącą postać wzoru Stirlinga:

$$\ln N! = N\ln N - N + O(\ln N), \qquad N \to \infty.$$

Rozszerzenie:* wyznacz także czynnik przedwykładniczy we wzorze $N! \sim \sqrt{2\pi N}(N/e)^N$.

Zadanie 4

Salę o wymiarach $3 \times 5 \times 2\,\mathrm{m}$ wypełnia klasyczny gaz doskonały przy $p = 1000\,\mathrm{hPa}$ i $T = 300\,\mathrm{K}$. Rozważamy jedną ustaloną chwilę; przy ustalonej całkowitej liczbie cząstek ich położenia są niezależne i równomierne w objętości sali.

a) Oblicz liczbę cząstek N_{gaz}. Przyjmij $k_{\mathrm{B}} = 1{,}380649 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$.

b) Dla ustalonej kostki o boku $a = 1\,\mathrm{mm}$ wyznacz rozkład liczby cząstek X i jej średnią m. Oszacuj z góry $\mathbb{P}(|X - m| > 10^{-3}m)$, a następnie prawdopodobieństwo takiego odchylenia w co najmniej jednej kostce ustalonego podziału sali na niepokrywające się kostki o boku a.

c)* Rozważ mocniejszy sens słowa „gdziekolwiek”: kostkę można przesuwać w sposób ciągły, przy krawędziach równoległych do ścian i przy całkowitym zawieraniu się w sali. Uzasadnij, że prawdopodobieństwo istnienia takiej kostki z odchyleniem ponad 0,1% nadal jest zaniedbywalnie małe.

Wskazówka: do dalekich ogonów użyj nierówności wykładniczej, a do wielu kostek – oszacowania prawdopodobieństwa sumy zdarzeń. W punkcie c*) można ograniczyć każdą kostkę od wewnątrz i zewnątrz kostkami o wierzchołkach na drobnej, ustalonej siatce.

Zadanie 5

Dla $\mu \in \mathbb{R}$ i $\alpha > 0$ rozważ rozkład normalny o gęstości

$$\rho(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha(x-\mu)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Wyznacz $\langle X \rangle$ i σ_X^2. Oblicz $\chi_X(t)$ oraz $M_X(s)$ i użyj $K_X(s)$ do obliczenia wszystkich kumulant rozkładu.

Zadanie 6

Dla rozkładu Poissona o parametrze $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

wyznacz $\chi_X(t)$, $M_X(s)$ i $G_X(u)$ oraz wszystkie kumulanty rozkładu.

Zadanie 7

Dla rozkładu dwumianowego o ustalonych $N \in \mathbb{N}$ i $p \in [0, 1]$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N,$$

wyznacz $\langle X \rangle$, σ_X^2, $\chi_X(t)$, $M_X(s)$ i $G_X(u)$. Przypadki $p = 0, 1$ rozumiej jako rozkłady skupione w jednym punkcie.

Zadanie 8

Niech $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\sigma > 0$. Oszacuj prawdopodobieństwo

$$\mathbb{P}(|X - \mu| > n\sigma)$$

dla $n \gg 1$. Podaj wiodący wyraz asymptotyczny z czynnikiem przedwykładniczym; uwzględnij oba ogony rozkładu.

Zadanie 9

Rozważ funkcję

$$\rho(x, y) = C \exp(-\alpha x^2 - \beta y^2 + \gamma x y), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

gdzie α, β, γ są rzeczywiste. Ustal, dla jakich parametrów jest ona normalizowalna, a następnie wyznacz C, $\langle X \rangle$, $\langle Y \rangle$, $\langle X^2 \rangle$, $\langle Y^2 \rangle$, $\langle XY \rangle$ oraz współczynnik korelacji

$$\operatorname{corr}(X, Y) = \frac{\langle XY \rangle - \langle X \rangle \langle Y \rangle}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Zadanie 10

Błądzenie losowe w trzech wymiarach. Cząstka startuje w początku układu i wykonuje N niezależnych, jednakowo rozłożonych kroków o długości $l > 0$. W każdym kroku kąt biegunowy $\theta \in [0, \pi]$ ma gęstość

$$p_\theta(\theta) = \frac{2}{\pi} \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad \text{względem miary } \mathrm{d}\theta,$$

a niezależny od niego kąt azymutalny ϕ jest jednostajny na $[0, 2\pi)$. Wyznacz po N krokach $\langle Z_N \rangle$, $\langle X_N \rangle$, $\langle Y_N \rangle$, $\langle Z_N^2 \rangle$, $\langle X_N^2 \rangle$, $\langle Y_N^2 \rangle$, a także momenty mieszane $\langle X_N Y_N \rangle$, $\langle X_N Z_N \rangle$, $\langle Y_N Z_N \rangle$ i odpowiadające im kowariancje.